「エレガントな解答をもとむ」

数学セミナー2005年2月号に出題，5月号に解答を掲載しました．応募総数78名，正解は12名です．テーマは「凹凸が同種の2曲線の交点はグラフから判断はできない」です．当初予定していた出題は次の問題です．

> a は1と異なる正の定数である．指数関数 $f(x)=a^x$ とその逆関数 $f^{-1}(x)$ について方程式 $f(x)=f^{-1}(x)$ の実数解の個数を求めてください．
> そして付録です．単調かつ凹凸を変えない関数 $f(x)$ とその逆関数 f^{-1} について方程式 $f(x)=f^{-1}(x)$ の実数解の個数がちょうど $2n+1$（n は自然数）のものはあるでしょうか．あればその実例を示してください．定義域は実数全体でも閉区間でも適宜決めて結構ですが，2回微分可能な関数に限ってください．

問題文が長いから，実際の出題は

> a は1と異なる正の定数である．指数関数 $f(x)=a^x$ の逆関数を $g(x)$ とする．方程式 $f(x)=g(x)$ を満たす実数解の個数を求めよ．

にしました．付録については最後に述べます．

$f^{-1}(x)=f(x)$ の解は $f(x)=x$ の解である

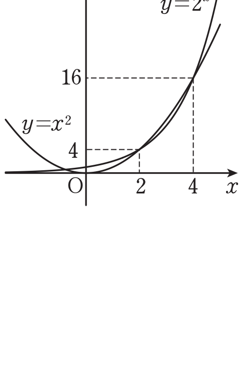
といきなり書く（高校生向けの）問題集があったりしますが，それは増加関数のときであり，減少関数のときはこの限りではありません．

$$x^2+y^2=1,\ 0\leqq x\leqq 1,\ 0\leqq y\leqq 1$$

のようにグラフが直線 $y=x$ に関して対称な場合 $f^{-1}(x)=f(x)$ なので方程式 $f^{-1}(x)=f(x)$ の解は定義域のすべてとなります．

【例】$2^n>n^2$ となる自然数 n を求めよ．

に対し下図を描いて $n=1,n\geqq 5$ と答える高校生がいます．$y=2^x$，$y=x^2$ のグラフは両方とも下に凸なので**何度も抜きつ抜かれつし多くの交点が存在する可能性**があるため，勝手な図であっさり流すことはできません．$2^n>n^2$ $(n>4)$ を式で確認するのが主要部分です．



本問でも，いきなり

(i) $f(x)=g(x)$ の解は $f(x)=x$ の解である．

(ii) グラフから，$f(x)=x$ となる x で $f'(x)<-1$ になるときは $f(x)=g(x)$ は3解をもつ．

とすることはできません．(i)は $f(x)$ が減少の時は間違いだし，(ii)は下に凸と下に凸だから3つより多くの解がないことは明らかではありません．単調で凹凸一定というだけでは解の個数は不明というのが付録です．

解（1） 実数解の個数を N とする．

（ア） $a>1$ のときは $f(x)=a^x$ は増加関数であり，$f(x)=f^{-1}(x)$ の解は $f(x)=x$ の解であることが次のようにわかる．

$$f(x)=f^{-1}(x)\Longleftrightarrow f(f(x))=x$$

$f(x)>x$ を満たす x に対しては $f(f(x))>f(x)>x$

$x>f(x)$ を満たす x に対しては $x>f(x)>f(f(x))$

となるから $f(f(x))=x$ を満たさない，よって，$f(x)=f^{-1}(x)$ の解は $f(x)=x$ の解である．

逆に $f(x)=x$ の解は $x=f^{-1}(x)$ を満たし $f(x)=f^{-1}(x)$ を満たす．

$a^x=x$ から $x\log_e a=\log x$

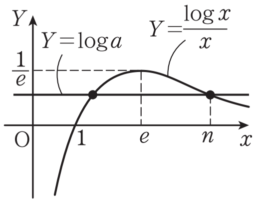
「文字定数は分離せよ」という受験で有名な定石がある．これは「変数を積，分数の形で集めろ」と認識した方が応用性が広い．

よって $\log_e a=\dfrac{\log x}{x}$ となり $y=\dfrac{\log x}{x}$ のグラフから

$\log_e a>\dfrac{1}{e}$ $\left(a>e^{\frac{1}{e}}\right)$ のとき $N=0$

$\log_e a=\dfrac{1}{e}$ $\left(a=e^{\frac{1}{e}}\right)$ のとき $N=1$

$0<\log_e a<\dfrac{1}{e}$ $\left(1<a<e^{\frac{1}{e}}\right)$ のとき $N=2$



（イ） $(0<a<1)$ のとき $f(f(x))=x$ を考えると指数の部分が小さくなって老眼には読みにくいので，$f(x)=f^{-1}(x)$ で考える．

$$a^x=\log_a x\ (x>0)$$

$$1=\frac{a^{-x}\log x}{\log a}$$

$\log a=-b\ (b>0)$ とおく．$a=e^{-b}$ である．

$$-1=\frac{e^{bx}\log x}{b}$$

ここで，$F(x)=\dfrac{e^{bx}\log x}{b}+1\ (x>0)$ とおく．

先に符号を調べる際にポイントとなる次のことに注意する．

【補題】$F(x)<0 \iff F(a^x)>0$

$F(x)>0 \iff F(a^x)<0$

【証明】グラフから考えても当然だが式で書く．

$F(x)=-a^{-x}\log_a x+1=a^{-x}(a^x-\log_a x)$

だから　$F(x)>0 \iff a^x>\log_a x \iff a^{a^x}<x$

$\iff a^{a^x}<\log_a a^x \iff F(a^x)<0$ ■

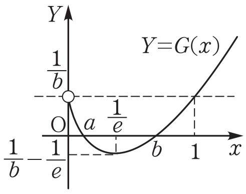
$$F'(x)=\frac{1}{b}\left(be^{bx}\log x+e^{bx}\cdot\frac{1}{x}\right)$$
$$=\frac{e^{bx}}{x}\left(x\log x+\frac{1}{b}\right)$$

ここで $G(x)=x\log x+\frac{1}{b}$ とおく．$G'(x)=\log x+1$

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{e}$	$\cdots$
$G'(x)$		$-$	0	$+$
$G(x)$	$\frac{1}{b}$	↘	$\frac{1}{b}-\frac{1}{e}$	↗

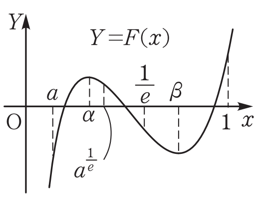
$\lim_{x\to+0} x\log x=0$ だから $\lim_{x\to+0} G(x)=\frac{1}{b}$

また $\lim_{x\to+\infty} G(x)=\infty$ である．



(a)　$\frac{1}{b}-\frac{1}{e}<0<\frac{1}{b}$ つまり $b>e$ のとき $G(x)=0$ の解は 2 つあり，その解を $\alpha, \beta\ (\alpha<\beta)$ とすると $F(x)$ は下のように増減するから N は最大で 3 である．

x	0	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$
$F'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$F(x)$		↗		↘		↗



$e^x \geqq ex$　（等号は $x=1$ で成り立つ）が示せるので

$F\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{-e^{\frac{b}{e}}}{b}+1=\frac{b-e^{\frac{b}{e}}}{b}<0$ ……………①

$F(1)=1>0$ ……………………………………②

ところで，$a<a^{\frac{1}{e}}=e^{-\frac{b}{e}}<e^{-1}=\frac{1}{e}<1$ であり，①と補題により $F(a^{\frac{1}{e}})=F(e^{-\frac{b}{a}})>0$，②と補題により $F(a)=F(e^{-b})<0$，だから $N=3$ である．

(b)　$0\leqq\frac{1}{b}-\frac{1}{e}$ つまり $0<b\leqq e$ のときは $G(x)\geqq 0$ より $F'(x)\geqq 0$ だから $F(x)$ は増加関数であり，

$\lim_{x\to+0} F(x)=-\infty$，$F(1)=1>0$ より $N=1$

以上をまとめ

$a>e^{\frac{1}{e}}$ のとき $N=0$

$a=e^{\frac{1}{e}}$ のとき $N=1$

$1<a<e^{\frac{1}{e}}$ のとき $N=2$

$\frac{1}{e^e}\leqq a<1$ のとき $N=1$

$0<a<\frac{1}{e^e}$ のとき $N=3$

⇨注　$F\left(e^{-\frac{b}{e}}\right)>0$ は直接示すことができる．

$$F\left(e^{-\frac{b}{e}}\right)=-\frac{e^{be^{-\frac{b}{e}}}}{e}+1$$

ここで $H(x)=xe^{-\frac{x}{e}}\ (x\geqq e)$ とすると

$H'(x)=e^{-\frac{x}{e}}-\frac{x}{e}e^{-\frac{x}{e}}=\frac{e-x}{e}e^{-\frac{x}{e}}\leqq 0$

$H(e)=1$ とから $0<H(b)<1$

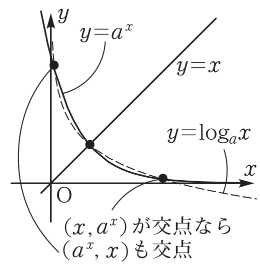
よって $e^{be^{-\frac{b}{e}}}<e$ から $F\left(e^{-\frac{b}{e}}\right)=-\frac{e^{be^{-\frac{b}{e}}}}{e}+1>0$

別解　$b>e$ のとき，補題に気づかないと $0<x<\frac{1}{e}$，$F(x)>0$ になる x が見つからない．この場合は次のようにもできる．

$\frac{1}{e}<x<1$ に $F(x)=0$ の解が少なくとも 1 つある．また，$a^x=x$ を満たす x は $F(x)=0$ の解だが，その解について

$$e^{-bx}=x \qquad \therefore \quad xe^{bx}-1=0$$

となり，$p(x)=xe^{bx}-1$ とおくと $p(x)$ は増加関数であり，$p\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{e}e^{\frac{b}{e}}-1>\frac{1}{e}e-1=0$ だから $a^x=x$ の解は $x<\frac{1}{e}$ にある．よって上で示した $\frac{1}{e}<x<1$ の解は $a^x=x$ の解ではない．さらに $a^x\neq x$，$F(x)=0$ を満たす解 x があれば a^x も $F(x)=0$ の解だから $N=3$ である．



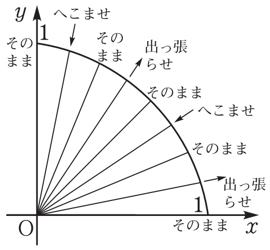
【付録について】以下松本眞氏（広島大）による．

定義域を $0 \leqq x \leqq 1$ としてまず最初に次の条件を満たす $h(x)$ を定め，そのグラフを C とします．

1. 単調減少で，傾きが 0 や無限大に近づかない．
2. C の曲率がゼロに近づかない．
3. $h(x) = h^{-1}(x)$ （C が直線 $y = x$ に関して対称）

そして C を極座標表示したものを

$(x(t), y(t))$ $\left(0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ とします．この曲線 C を，原点 O を通る直線で放射上に $4n$ 等分し「そのまま，ごく小さく出っ張らせ，そのまま，ごく小さくへこませ」ということを繰り返していきますと，$f(x) = f^{-1}(x)$ が $2n+1$ 個の解をもちます．図は $n = 2$ の場合です．



変形がごく小さければ，単調性や凸性を変えません．

もう少し具体的に書きます．上のような直線 $y = x$ に関して対称な曲線 C で極座標表示

$$C(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix},\ 0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}$$

において，ある正定数 M が存在して

$$0 \leqq x(t) \leqq 1,\ 0 \leqq y(t) \leqq 1$$

$$x'(t) < -M,\ y'(t) > M$$

$$\det\begin{pmatrix} x'(t) & x''(t) \\ y'(t) & y''(t) \end{pmatrix} > M$$

が成立するような曲線を選びます．例えば $(0, 1)$, $(1, 0)$ を通り半径が 1 より大きな円はこの性質をみたします．

ちなみに $x'(t) < 0$, $y'(t) > 0$ かつ

$\det\begin{pmatrix} x'(t) & x''(t) \\ y'(t) & y''(t) \end{pmatrix} > 0$ ならば

$x = x(t)$, $y = y(t)$

から t を消去して y を x で表した関数

$$y = y(x^{-1}(x))$$

は x について単調減少かつ上に凸な関数です．

さて，このような $C(t)$ に対し，$D(t)$ を，十分小さな正定数 e に対して

$$D(t) = (1 + e\sin 4nt)C(t)$$

なる極座標表示で与えます．

「e を十分小さくとれば D は単調減少かつ上に凸」を認めるならば D のグラフに対応する関数 f について

$f(x) = f^{-1}(x)$ となる点は対角線対称部分，すなわち

$$C(t)(1+e\sin 4nt) = C\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\left\{1 + e\sin 4n\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\right\}$$

となる点と対応します．ここで C は対角線対称，

$C(t) = C\left(\dfrac{\pi}{2} - t\right)$ なので，よって上の等式は

$$\sin 4nt = \sin(2n\pi - 4nt)$$

となり，$4nt = k\pi$ とおけて

$$t = \frac{k\pi}{4n}\ (k = 0,\ 1,\ \cdots,\ 2n)$$

の $2n+1$ 個になります．

あと示せばよいのは，e を十分小さくとれば D は単調減少かつ上に凸というものです．

$$x' = 4ne\cos 4nt \cdot x(t) + (1 + e\sin 4nt)x'(t)$$

$$x(t) \cdot 4ne\cos 4nt \leqq 4ne$$

$$x'(t)(1 + e\sin 4nt) \leqq -M(1 - e)$$

より $x' \leqq -M(1-e) + 4ne$

となり，e を十分小さくとれば $x' < 0$ です．

同様に $y' > 0$ である．次に

$$D(t) = (1 + e\sin 4nt)C(t)$$

$$D'(t) = 4ne\cos 4nt \cdot C(t) + (1 + e\sin 4nt)C'(t)$$

$$D''(t) = -16n^2 e\sin 4nt \cdot C(t) + 8ne\cos 4nt \cdot C'(t) + (1 + e\sin 4nt)C''(t)$$

展開公式

$$\det(X + Y\ Z) = \det(X\ Z) + \det(Y\ Z)$$

（X，Y，Z は列ベクトル）などを使って

列ベクトル $D'(t)$，$D''(t)$ から作った行列の行列式 $\det(D'(t)\quad D''(t))$ を展開すれば，

$$(1 + e\sin 4nt)^2 \cdot \det(C'(t)\,C''(t))$$

は 0 に近くない正の値で，e が十分小さいとき，e のかかっている項は十分 0 に近いので

$$\det(D'(t)\quad D''(t)) > 0$$

となる．$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$ の符号は回る向きをしらべることができ，ベクトル $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ から $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ に左回りなら正，右回りなら負です．